

## 3.5 非简谐效应 (Anharmonicity)

- 一. 简谐近似的不足
- 二. 非简谐下的解
- 三. 绝缘体的热导率
- 四. 晶格状态方程和热膨胀

参考：黄昆书 3.10 3.11 两节  
Kittel 8 版 5.2 5.3 两节

### 一. 简谐近似的不足；非简谐项和热膨胀效应。

在简谐近似下，我们描述了晶体原子的热运动，并以此图像解释了固体热容、离子晶体的光学及介电性质。

简谐近似下的晶体，每个简正振动模将完全独立于所有其它振动模而传播，并且可以应用叠加原理，这样的晶体我们可称作简谐晶体。但这种简谐晶体的一些性质却和实际晶体完全不同，是我们过于理想化的结果。

然而在简谐近似下，得出了一些与事实不符合的结论：

1. 没有热膨胀；(原子的平衡位置不依赖于温度)
2. 力常数和弹性常数不依赖于温度和压力；
3. 高温时热容量是常数；
4. 等容热容和等压热容相等  $C_V = C_P$
5. 声子间不存在相互作用，声子的平均自由程和寿命都是无限的。或说：两个点阵波之间不发生相互作用，单个波不衰减或不随时间改变形式。
6. 没有杂质和缺陷的简谐晶体的热导是无限大的。
7. 对完美简谐晶体而言，红外吸收峰，Raman 和 Brillouin 散射峰以及非弹性中子散射峰宽应均为零。

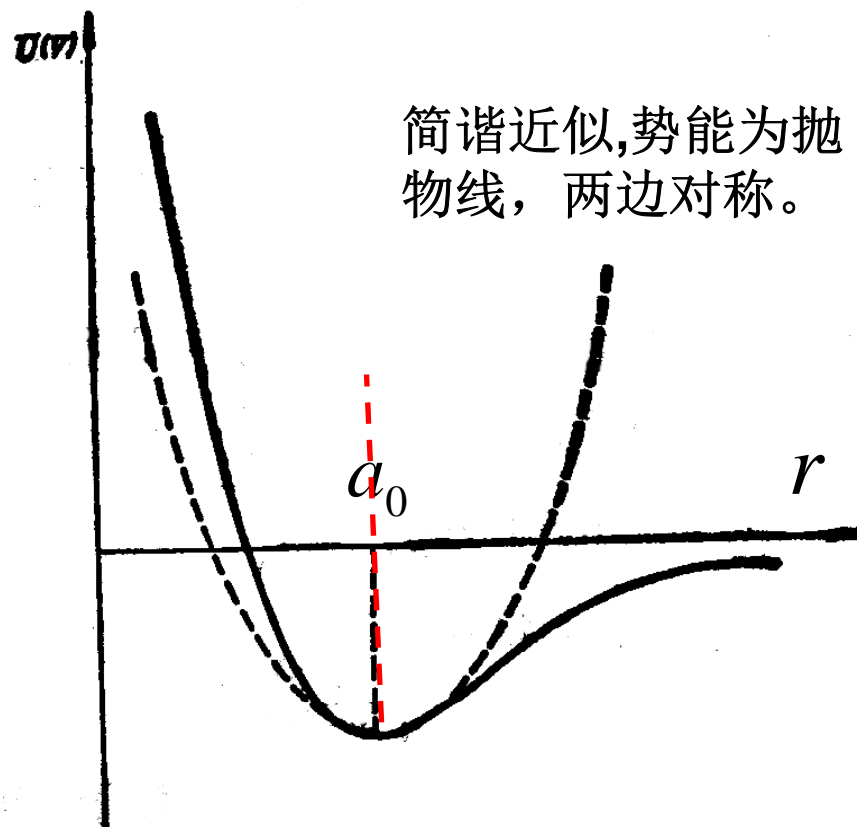
以上结论对于实际晶体而言，没有一条是严格成立的。

## 势能的展开

$$V(r) = V(a + \delta) = V(a) + \left(\frac{dV}{dr}\right)_a \delta + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_a \delta^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3V}{dr^3}\right)_a \delta^3 + \dots$$

↓                      ↓                      ↓                      ↓  
常数                      0                      简谐项                      非简谐项

然而非谐项的存在将会给运动方程的求解带来很多的困难，所以我们在讨论非简谐效应时，往往更多的采用定性分析的方法，采用对简谐近似结论修订和补充的方法来适应非简谐的情况。



势能的展开(另一种展开方式)

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial V}{\partial u_i} \right)_0 u_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \right)_0 u_i u_j + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial^3 V}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \right)_0 u_i u_j u_k + \dots$$

.....  
简谐项

线形变换引入简正坐标

$$\sqrt{m_i} u_i = \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} Q_j$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} \dot{Q}_i^2$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} \omega_i^2 Q_i^2$$

没有交叉项, 意味着每个简谐振动模式(声子)之间没有相互作用

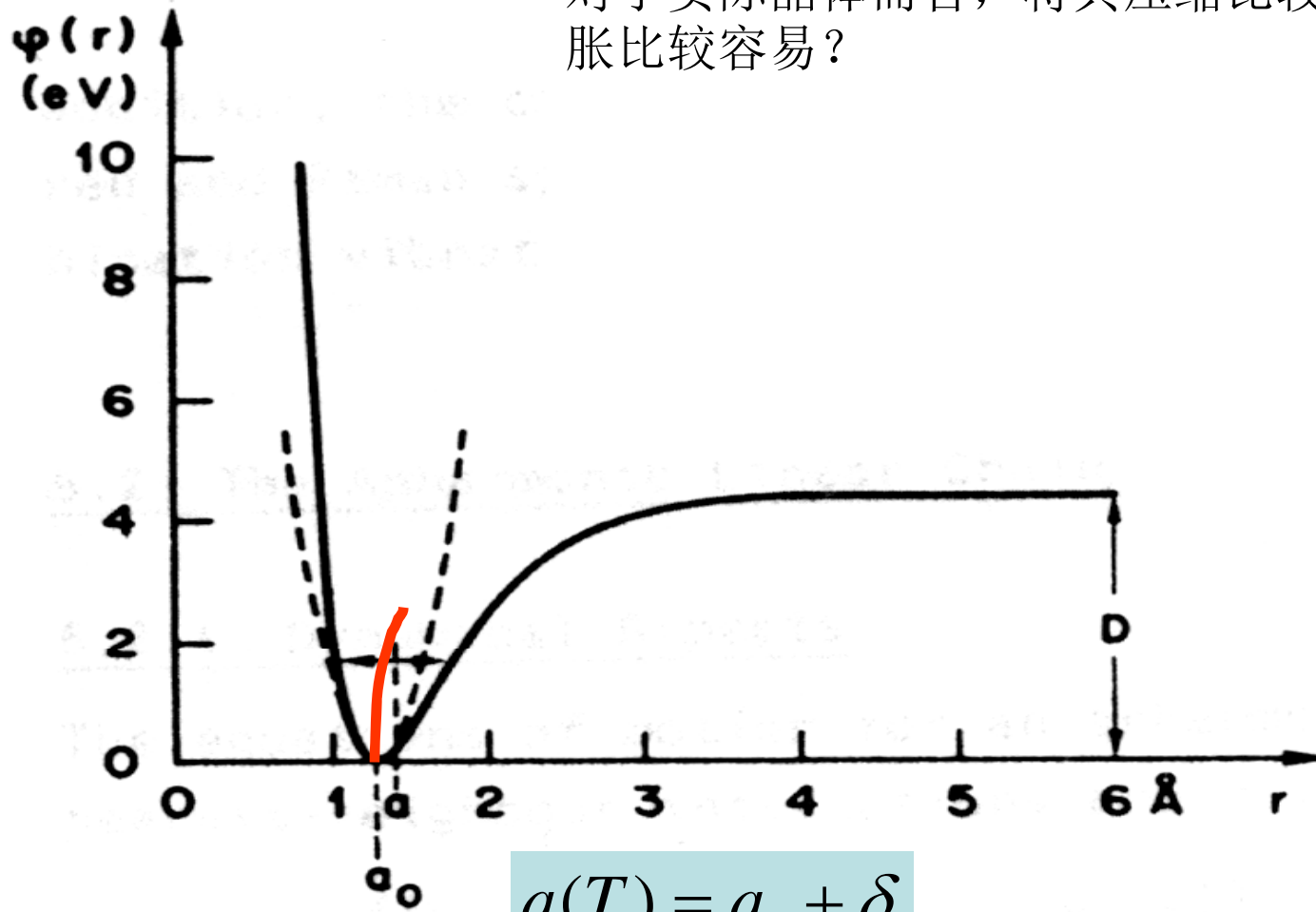
简谐近似下：

- 1、声子无相互作用，无热量交换
- 2、无法进入热平衡状态
- 3、声子数目不发生变化

非简谐效应：

- 1、振动模式（声子）不再相互独立
- 2、声子气体不再是理想气体
- 3、在振动模式近似独立的条件下，可以将高次项考虑为微扰

对于实际晶体而言，将其压缩比较容易还是使其膨胀比较容易？



$$a(T) = a_0 + \delta$$

见 Peter Bruesch Phonons: Theory and Experiments I P154

从势能展开项开始讨论：

$$\begin{aligned}
 u(a_0 + \delta) &= u(a_0) + \left(\frac{du}{dr}\right)_{a_0} \delta + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)_{a_0} \delta^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3u}{dr^3}\right)_{a_0} \delta^3 \\
 &\quad + \frac{1}{4!} \left(\frac{d^4u}{dr^4}\right)_{a_0} \delta^4 + \dots
 \end{aligned}$$

$\downarrow$   
 常数定义为零

$\downarrow$   
 平衡点微商为零

$\downarrow$   
 简谐项

$\downarrow$   
 非谐项

$$= \frac{1}{2} \beta_0 \delta^2 + \frac{1}{6} g_0 \delta^3 + \frac{1}{24} h_0 \delta^4 + \dots$$

$$u(a_0 + \delta) = \frac{1}{2} \beta_0 \delta^2 + \frac{1}{6} g_0 \delta^3 + \frac{1}{24} h_0 \delta^4$$

$$\beta_0 > 0, g_0 < 0, h_0 < 0$$

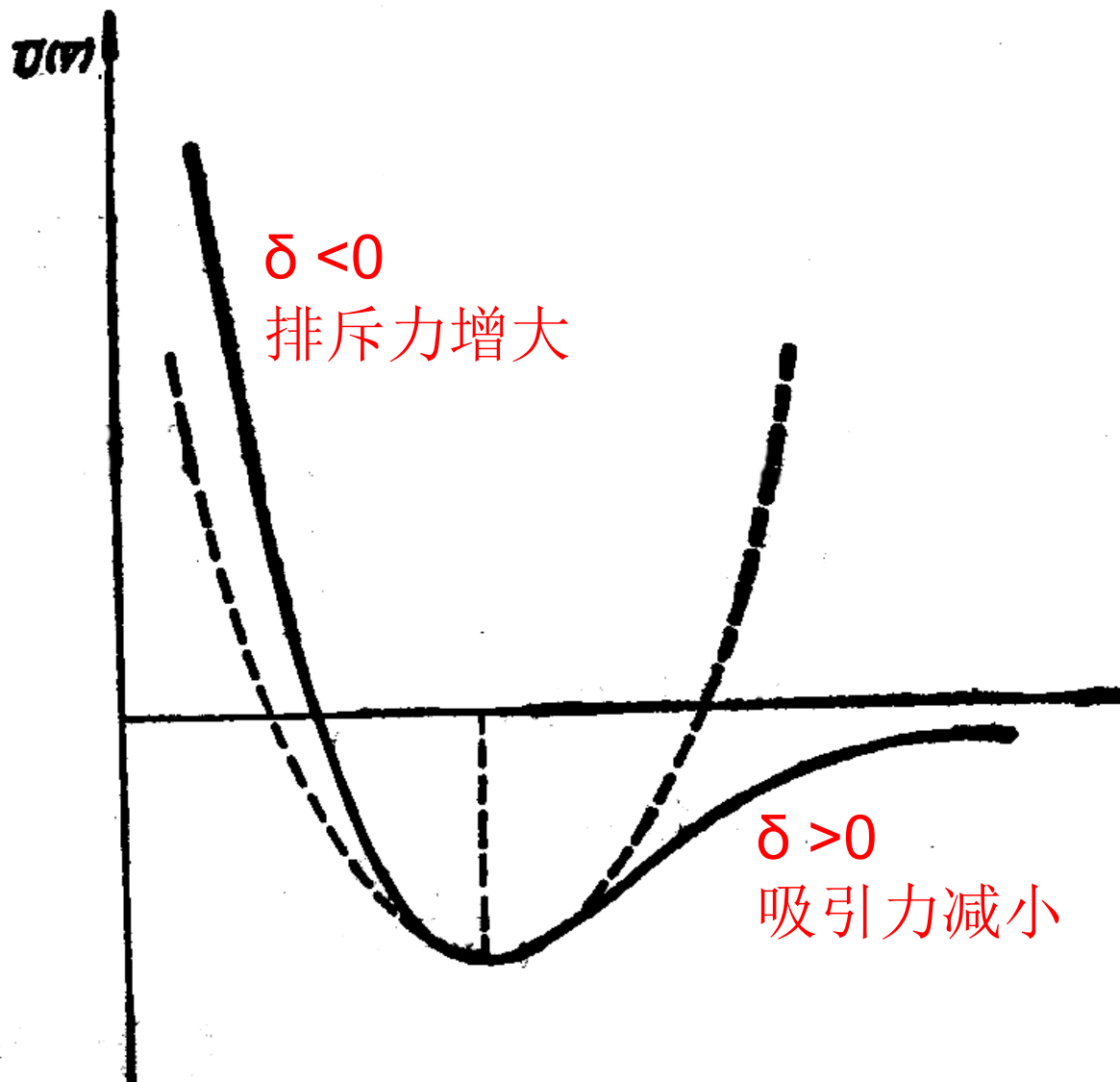
简谐项

非简谐项

$$\frac{1}{6} g_0 \delta^3, g_0 < 0:$$

代表原子之间排斥作用的非对称性： $\delta > 0$ 时， $\frac{1}{6} g_0 \delta^3 < 0$ ，吸引力减小；而 $\delta < 0$ 时， $\frac{1}{6} g_0 \delta^3 > 0$ ，排斥力增大。因此考虑这一非简谐项后，势能曲线不对称： $\delta > 0$ 一边比较平缓，而 $\delta < 0$ 一边则比较陡峭。因此非谐振动，使原子间产生一定的相互斥力，从而引起热膨胀。所以热膨胀是一种晶格振动的非谐效应。





$$\frac{1}{24}h_0\delta^4, h_0 < 0:$$

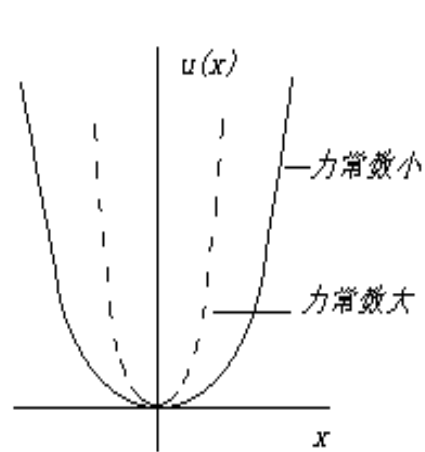
代表在大振幅下振动的软化：考虑二阶项和四阶项，有：

$$u(a_0 + \delta) = \frac{1}{2}\beta_0\delta^2 + \frac{1}{24}h_0\delta^4$$

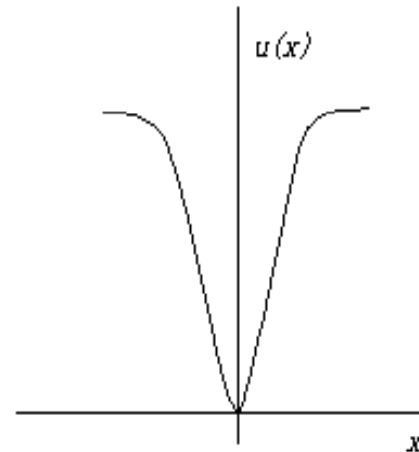
$$\beta_0' = \beta_0 + \frac{1}{6}h_0\delta^2 < \beta_0$$

回复力常数减小，振动软化

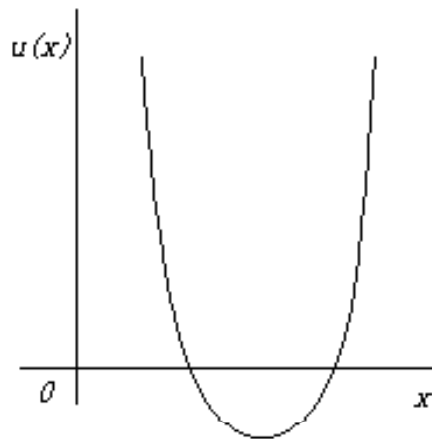
$$u(a_0 + \delta) = \frac{1}{2} \beta_0 \delta^2 + \frac{1}{6} g_0 \delta^3 + \frac{1}{24} h_0 \delta^4$$



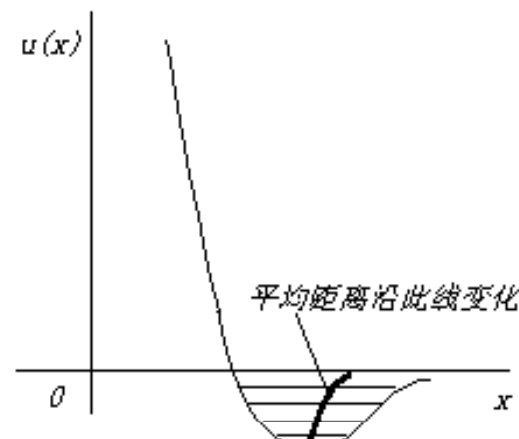
力常数对  $u(x)$  的影响



四次方项对势能的影响



简谐势



非简谐势

我们先只取到三次方项：

$$u(a_0 + \delta) = \frac{1}{2} \beta_0 \delta^2 + \frac{1}{6} g_0 \delta^3$$

按照 Boltzman 统计，处于热平衡时，对平衡态的偏离：

$$\bar{\delta} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta e^{-\frac{u}{kT}} d\delta}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u}{kT}} d\delta} = -\frac{1}{2} \frac{g_0}{\beta_0^2} k_B T$$

（求解比较繁琐，  
需要假定： $g_0 < \beta_0$ ）

显然，不考虑三次方项， $g_0 = 0, \bar{\delta} = 0$  不会发生热膨胀。

考虑了三次项后即可解释热膨胀，此时线膨胀系数是常数：

$$\frac{1}{a_0} \frac{d\bar{\delta}}{dT} = -\frac{g_0 k_B}{2\beta_0^2 a_0} = \text{常数}$$

如果考虑比三次方以上的更高次项，膨胀系数就不再是线性的。实验曲线表明了这点。

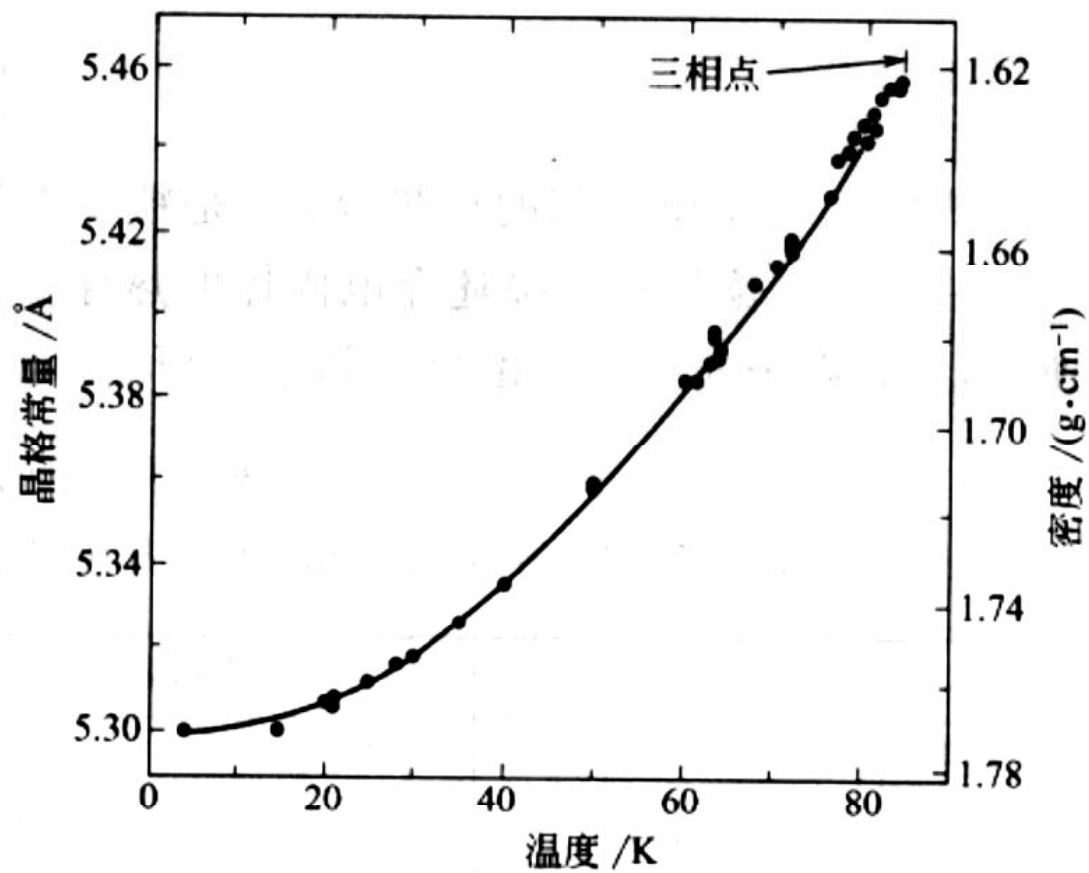


图 15 固态氮的晶格常量与温度的函数关系

见Kittel p89

## 二. 非简谐下的解:

回顾分析力学对晶格振动的处理

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial V}{\partial u_i} \right)_0 u_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \right)_0 u_i u_j + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial^3 V}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \right)_0 u_i u_j u_k + \dots$$

引入简正坐标:

$$\sqrt{m_i} u_i = \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} Q_j \quad Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \dots, Q_{3N}$$

动能与势能:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} \dot{Q}_i^2 \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} \omega_i^2 Q_i^2$$

$$L = T - V \quad \text{正则动量: } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \dot{Q}_i$$

$$H = \sum_i \dot{Q}_i p_i - L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} (p_i^2 + \omega_i^2 Q_i^2)$$

正则方程:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial Q_j}$$
$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

应用正则方程得到:  $\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, 3N$

任意简正坐标的解:  $Q_i = A \sin(\omega_i t - \delta)$

简谐近似下的运动方程  $\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = 0$

经典力学中的谐振子方程

考虑谐振子方程中的非简谐项，双原子运动方程：

$$\mu \ddot{\delta} = f(\delta) = -\frac{\partial u}{\partial \delta} = -\beta_0 \delta - \frac{1}{2} g_0 \delta^2 \quad \mu \text{ 是两原子的约化质量}$$

$$\ddot{\delta} + \frac{\beta_0}{\mu} \delta + \frac{1}{2} \frac{g_0}{\mu} \delta^2 = 0$$

$$\ddot{\delta} + \omega_0^2 \delta + s \omega_0^2 \delta^2 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{\beta_0}{\mu} \\ s = \frac{g_0}{2\beta_0} < 0 \end{cases}$$

其解的形式为： $\delta = v_0 + A(\cos \omega t + \eta \cos 2\omega t)$   $\textcircled{3}$

这里只考虑了**Fourier**展开式中的头三项，所以只有 $2\omega$ 项，如果考虑 $\delta^3$ 项，则会有 $3\omega$ 的项。



将③式代入①求解，并假定  $sA \ll 1$ ，有：

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = -\frac{1}{2} s A^2 > 0 \quad \text{④} \\ \omega^2 = \omega_0^2 (1 - s^2 A^2) \quad \text{⑤} \\ \eta = \frac{sA}{6} \quad \text{⑥} \end{array} \right.$$

利用③式，并考虑到： $\langle \cos \omega t \rangle = 0, \langle \cos 2\omega t \rangle = 0$

$$\text{有： } a(T) = \langle r \rangle = a_0 + \langle \delta \rangle = a_0 + v_0 = a_0 - \frac{1}{2} s A^2 = a_0 - \frac{1}{4} \frac{g_0}{\beta_0} A^2 \quad \text{⑦}$$

因为  $g_0 < 0$ ，所以： $a(T) > a_0$

当系统与热源处于热平衡状态时，双原子的平均振动能：

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 A^2 = \frac{\beta_0}{2} A^2 = k_B T \quad (sA \ll 1)$$

$$\therefore A^2 = \frac{2k_B T}{\beta_0} \quad \text{振幅平方与温度成正比}$$

代入⑦式可得：

$$a(T) = a_0 - \frac{1}{2} \frac{g_0}{\beta_0^2} k_B T \quad \text{与前面结果一致}$$

⑤式可以写成：

$$\omega^2(T) = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{g_0^2}{2\beta_0^3} k_B T \right)$$

温度升高，原子间距增大，作用力下降，振动频率降低。

### 三. 绝缘体的热导率（黄昆书 §3-11节p142）

当固体中的温度不均匀时，将会有热能从高温处流向低温处，这种现象称作热传导。实验表明：**单位时间内通过单位面积的热能（称作热流密度）与温度梯度成正比，其比例系数称作热导率。**在简单假定温度  $T$  只是  $x$  方向的函数时，有：

$$j_{\theta} = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

负号表示热能传输总是从高温到低温。

固体中，可以通过自由电子传热（**电子热导**），也可以通过晶格振动（声子的运动）来传热，本节只讨论绝缘体的热导，即**晶格热导**。简谐近似下无杂质、无缺陷的晶体其热导率应该趋于无穷，这与事实不符，在**考虑了格波与晶体边界、杂质原子、缺陷及格波之间的相互作用后**，绝缘体的热导率可以得到很好的理解。

实验公式表明能量传输过程是一个无规的扩散过程，晶格热导和气体分子的热传导有相似之处：当样品内存在温度梯度时，声子的密度分布是不均匀的，高温处声子密度高，低温处声子密度低，因而声子在无规扩散运动的基础上产生了平均的定向运动，即热流的传播方向。因此晶格热传导可以看成是声子扩散运动的结果。可以借用气体热传导的公式来分析：

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}$$

$$\kappa = \frac{1}{3} C_V \lambda \bar{v}_s$$

$C_V$  是单位体积的热容， $\bar{v}_s$  是声子的平均运动速度。

$$\kappa = \frac{1}{3} C_V \lambda \bar{v}_s$$

$\lambda$  是声子自由运动的自由程。  $\lambda$  的大小由两种过程来决定：  
1) 声子之间的碰撞，它是非谐效应的反映； 2) 晶体中杂质、缺陷以及晶体边界对声子的散射。

## 1) 声子的碰撞（耦合）

考虑非简谐项后一维单原子链运动方程的求解：

$$m\ddot{u}_l = \beta[(u_{l+1} - u_l) - (u_l - u_{l-1})] + \frac{1}{2}g[(u_{l+1} - u_l)^2 - (u_l - u_{l-1})^2] \\ + \frac{1}{6}h[(u_{l+1} - u_l)^3 - (u_l - u_{l-1})^3] + \dots$$

方程求解非常复杂，特别是非谐项比较大时，完全不能用类似的方法来表述，但我们在处理弱非简谐情况时，可以把简谐近似下得到的相互独立的简谐振子解作为基础，把非简谐项作为微扰来处理，这就导致声子之间存在着相互作用，会发生碰撞，能量改变且只有有限的寿命。一种频率的声子可以湮灭而产生另一种频率的声子，这样经过一段时间后，各种频率的声子数目就会达到和环境温度相平衡的分布。简单说就是通过非谐项的作用，本来相互独立的谐振子之间发生耦合，即两个声子之间可以发生碰撞而产生第三个声子，或说一个波矢为 $\mathbf{q}_1$ 的声子，吸收一个波矢为 $\mathbf{q}_2$ 的声子，变成一个波矢为 $\mathbf{q}_3$ 的声子。

声子之间的碰撞要服从能量和动量守恒：

$$\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \hbar\omega_3$$

$$\hbar\vec{q}_1 + \hbar\vec{q}_2 = \hbar\vec{q}_3$$

Normal process 正常过程（N过程）

$$\hbar\vec{q}_1 + \hbar\vec{q}_2 = \hbar\vec{q}_3 + \hbar\vec{G}_l$$

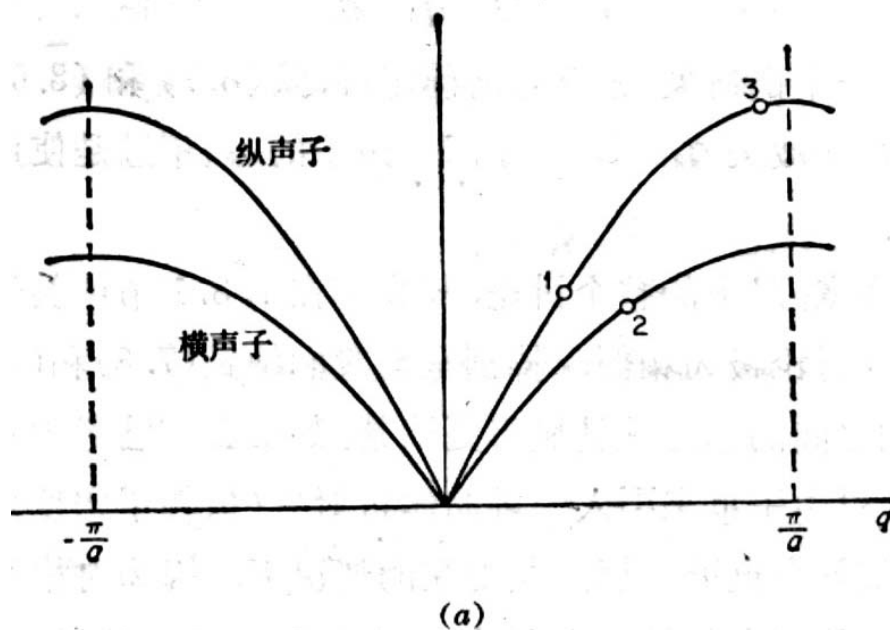
Umklapp process 倒逆过程（翻转过程）（U过程）

这里，波矢  $\vec{q}_3$  和波矢  $\vec{q}_3 + \vec{G}_l$  是对  
同一声子的，表述了同样一个运动状态。

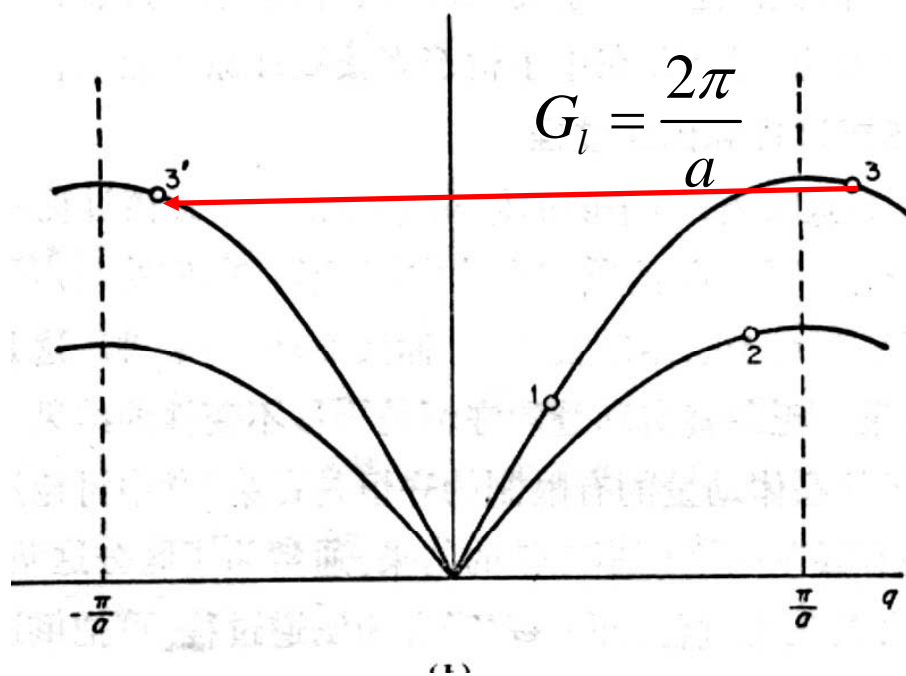
由于波数必须在第一布里渊区内取值，因此动量守恒的要求  
会存在两种情况： $\vec{q}_3$  仍在第一布里渊区内的称正常过程；  
新声子的  $\vec{q}$  值等于第一布里渊区内某个值  $\vec{q}_3$  加一个倒易矢  
量  $\vec{G}_l$  的称倒逆过程。从下面图中可以清楚的看出倒逆过程  
是影响声子传播、降低热传导的主要因素。

正常过程

Normal  
Processes



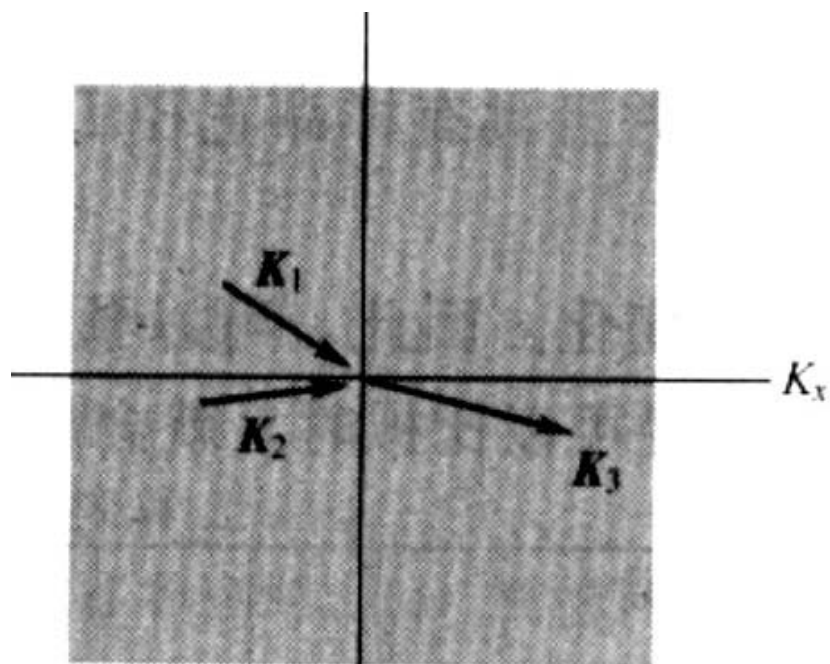
倒逆过程  
Umklapp  
Processes





二维正方晶格中正常声子碰撞过程

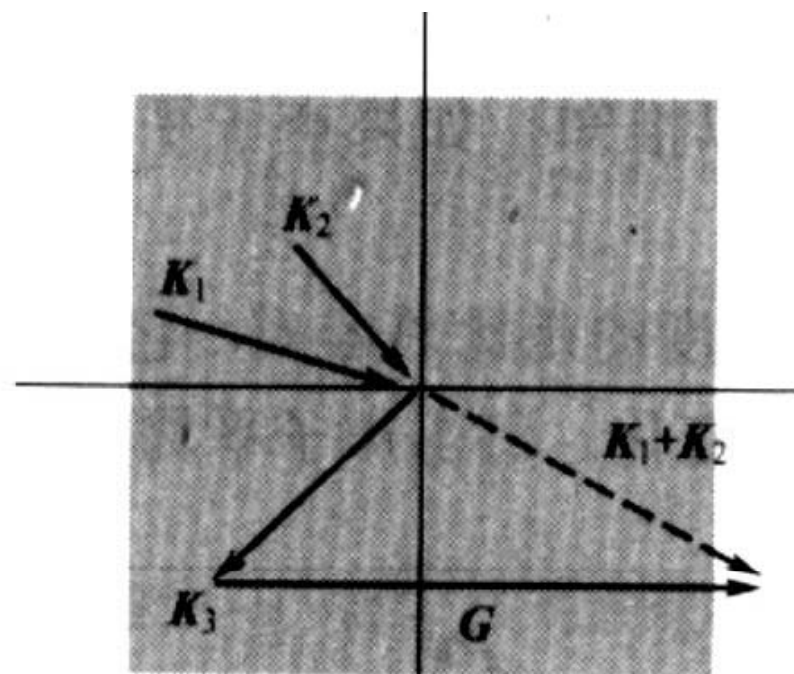
$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$$



(a)

二维正方晶格中倒逆声子碰撞过程

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{G}_1$$



(b)

## 声子间碰撞：正常过程（N过程）

$$\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \hbar\omega_3$$

$$\hbar\vec{q}_1 + \hbar\vec{q}_2 = \hbar\vec{q}_3$$

系统如何才能达到热平衡？

外界干扰使声子获得了某一方向的定向运动的动量，在由非平衡态向平衡态过渡时，定向运动的动量应当逐渐减到零，这样才能使系统进入热平衡状态，为了能进入热平衡状态，显然应当存在这样一种机制，它能衰减声子定向运动的动量。

正常过程并没有使动量衰减，系统总的动量不变，定向运动没有被衰减。

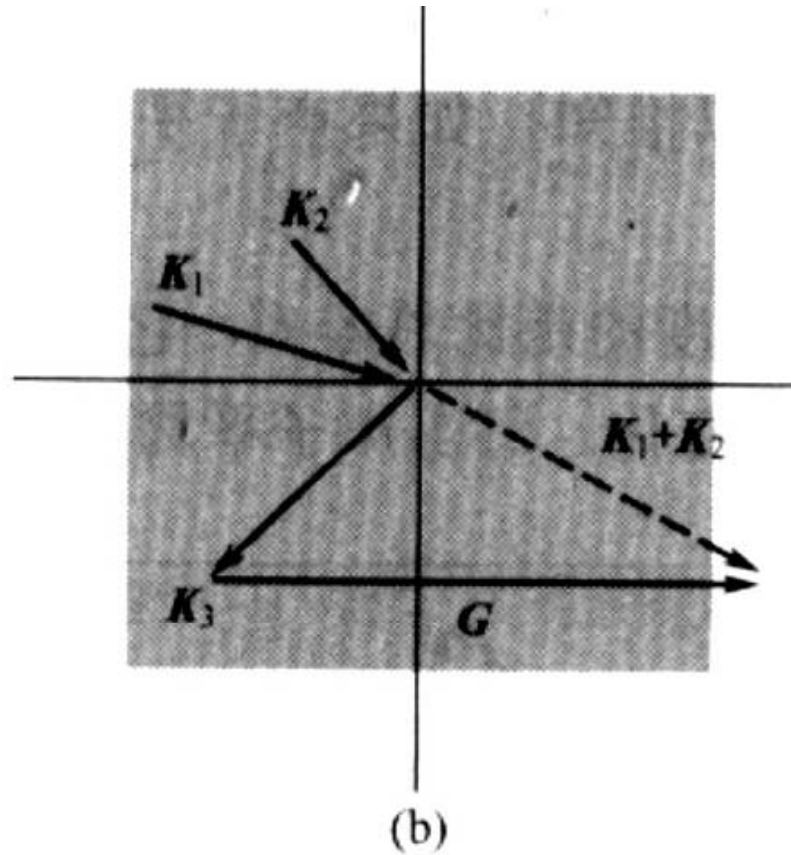
正常运动对实现热平衡没有贡献

## 声子间碰撞：倒逆过程（U过程）

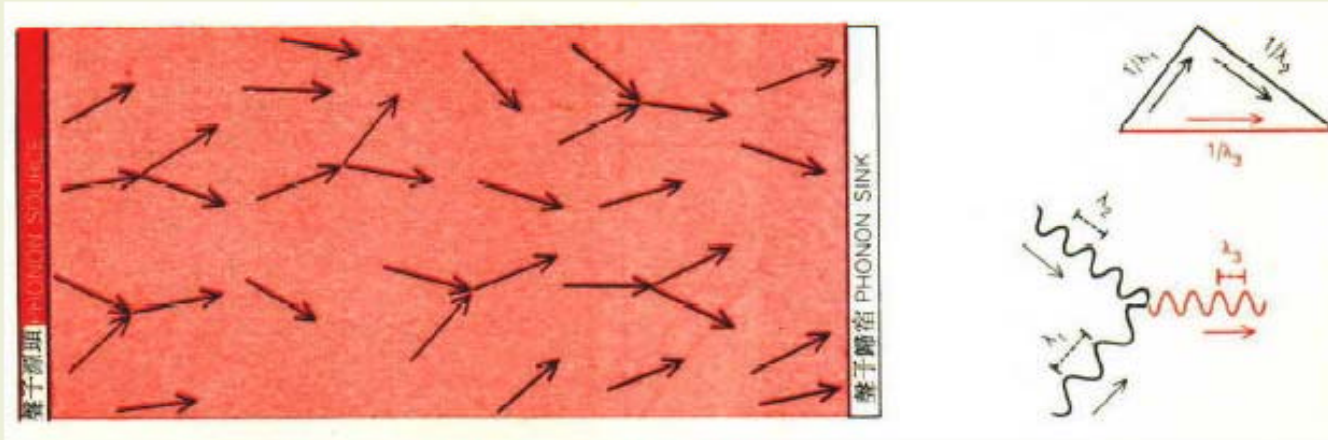
$$\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \hbar\omega_3$$

$$\hbar\vec{q}_1 + \hbar\vec{q}_2 = \hbar\vec{q}_3 + \hbar\vec{G}_l$$

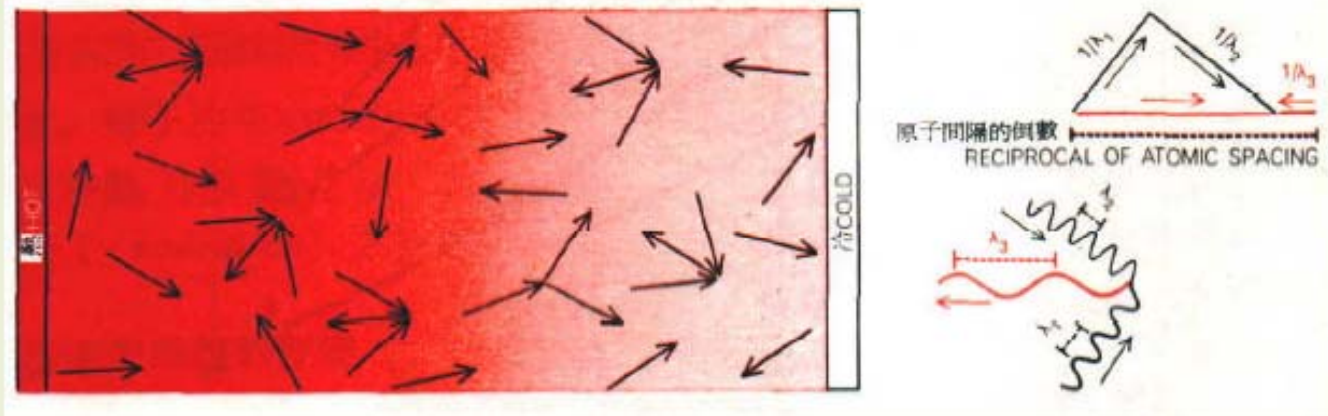
倒逆过程使得声子某方向动量发生倒转，从而衰减了整个声子团的动量，对固体热传导有贡献。



**Normal process** (正常過程): total momentum of the 2 phonons remains the same before and after scattering, no resistance to thermal current!



**Umklapp process** (轉向過程, Peierls 1929):



第1BZ的尺寸与德拜球的半径有相同的数量级，若两个声子碰撞后产生的要超出第1BZ，则这两个声子的波矢应在  $\frac{1}{2}q_D$  附近，这样的声子的能量为

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_D = \frac{1}{2}k_B T_D$$

类似的声子数目在高温下是比较多的，在低温下是比较少的，据玻色分布：

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

当  $T \gg T_D$  时，具有  $\frac{1}{2}\hbar\omega_D$  的声子数

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \approx \frac{k_B T}{\frac{1}{2}\hbar\omega_D} \approx \frac{2T}{T_D}$$

与温度是成正比的，随着温度的提高，达到  $\frac{1}{2}\hbar\omega_D$  能量的声子数相当多，声子与声子的碰撞主要是倒逆过程。

当  $T \ll T_D$  时，具有  $\frac{1}{2}\hbar\omega_D$  能量的声子数

$$\bar{n} \propto e^{\frac{-k_B T_D}{2k_B T}} \sim e^{\frac{-T_D}{2T}}$$

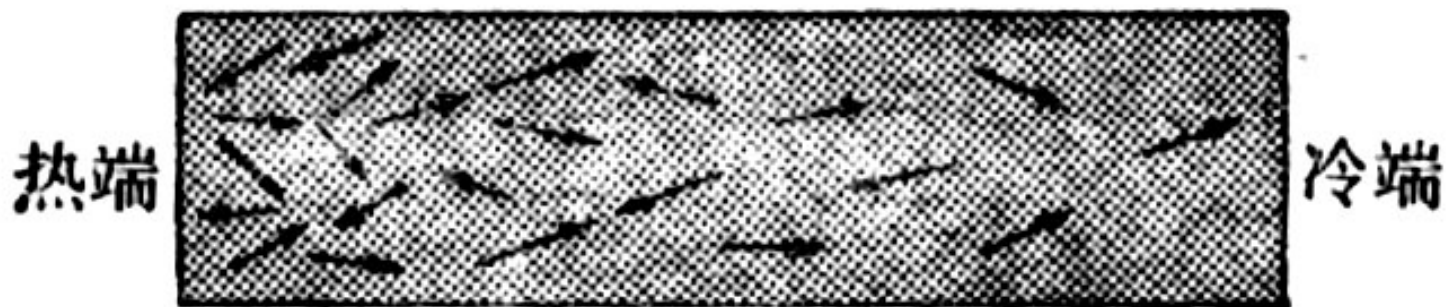
随温度的下降按指数下降，因此在低温下发生倒逆过程的声子数目是急剧下降的，倒逆过程的几率很小，声子与声子的碰撞主要是正常过程，倒逆过程在低温下是冻结的，平均自由程是比较长的。

## THE CLASSICAL GAS vs. THE PHONON GAS

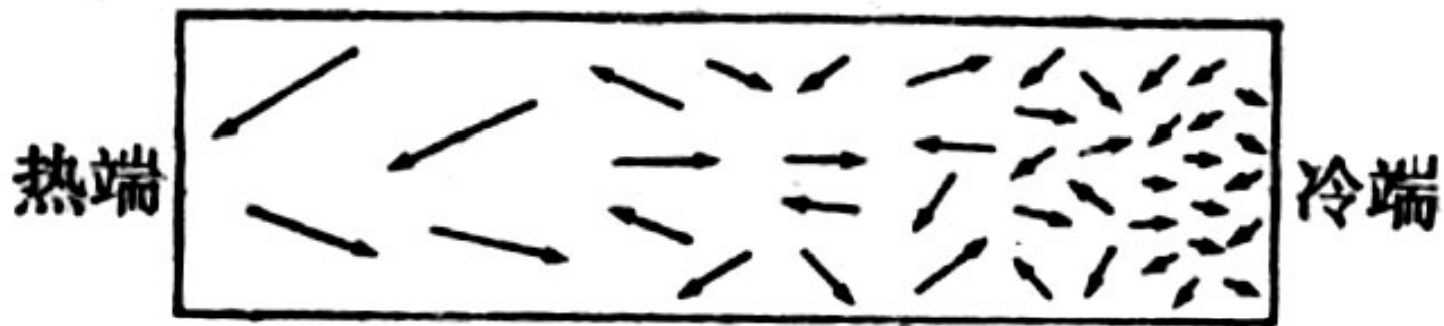
	CLASSICAL GAS OF MOLECULES	PHONON GAS
Container	A vessel with impenetrable walls	A crystal, which is the medium that sustains the phonons
Collisions	Molecules collide with each other and with walls of vessel	Phonons collide with each other, with surface of crystal, and with impurities
Energy conserved in collisions	Yes	Yes
(Crystal) momentum conserved in collisions	Yes (except at walls)	Yes (except at surfaces and in collisions with impurities), provided that $T \ll \Theta_D$ , so that umklapp processes are frozen out
Number conserved in collisions	Yes	No



# 声子气体和真实气体的热导过程示意图



(a) 声子气体



(b) 真实气体

**表 3-2 典型非金属材料的热导率和平均自由程**

	$T = 273\text{ K}$		$T = 77\text{ K}$		$T = 20\text{ K}$	
	热导率 $\kappa$ (w/m·K)	声子平均自由程 $\lambda$ (m)	热导率 $\kappa$ (w/m·K)	声子平均自由程 $\lambda$ (m)	热导率 $\kappa$ (w/m·K)	声子平均自由程 $\lambda$ (m)
硅	150	$4.3 \times 10^{-8}$	1500	$2.7 \times 10^{-6}$	4200	$4.1 \times 10^{-4}$
锗	70	$3.3 \times 10^{-8}$	300	$3.3 \times 10^{-7}$	1300	$4.5 \times 10^{-5}$
石英晶体(SiO <sub>2</sub> )	14	$9.7 \times 10^{-9}$	66	$1.5 \times 10^{-7}$	760	$7.5 \times 10^{-5}$
CaF <sub>2</sub>	11	$7.2 \times 10^{-9}$	39	$1.0 \times 10^{-7}$	85	$1.0 \times 10^{-5}$
NaCl	6.4	$6.7 \times 10^{-9}$	29	$5.0 \times 10^{-8}$	45	$2.0 \times 10^{-6}$
LiF	10	$3.3 \times 10^{-9}$	150	$4.0 \times 10^{-7}$	8000	$1.2 \times 10^{-3}$

**注意：**室温下这些晶体中声子的平均自由程只有几十个纳米，即几百个原子间距内就会发生碰撞。所以不难理解晶体热导率的数值有限。

虽然我们可以借用上述公式讨论晶格热导问题，但像所有扩散问题一样，其影响因素是极其复杂的，有固体物理书戏称“所涉及的因素几乎和确定天气情况一样多”。

### 影响平均自由程的主要因素：

和声子平均数目成反比：声子数目越大，碰撞几率越高。

$$T \gg T_D, \bar{n}(q) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} \approx \frac{k_B T}{\hbar\omega}, \quad \text{高温下 } \lambda \text{ 和温度成反比。}$$

$$T \ll T_D, \bar{n} \propto e^{-\frac{T_D}{\alpha T}}$$

低温下  $\lambda$  随  $T$  下降指数增长

$\alpha = 2-3$  之间的数字

低温下平均自由程迅速增长的原因是因为 **U** 过程决定着  $\lambda$ ，但能参与 **U** 过程的高 **q** 声子随温度下降迅速减少所致。

## 2) 杂质、缺陷、边界散射，尺寸效应

除了声子的U过程，晶体尺寸、不均匀性、杂质和缺陷都影响着平均自由程，成为影响晶体热导率的因素，晶体尺寸越小、杂质和缺陷越多，声子被散射的几率越大，热导率越小。

在 $T \rightarrow 0$ 时，晶体中主要激发波长很长的声子，这时由于衍射作用，杂质、缺陷不再是有效的散射体。

声子数随温度降低按指数规律急剧下降，则平均自由程 $\lambda$ 增大很快，当温度下降到接近0K时 $\lambda \rightarrow \infty$ 。但这时即使在很纯的晶体中，热导率仍是有限的，这是晶体边界对声子的散射所致。随温度降低， $\lambda$ 增大。当 $\lambda$ 增大到与晶体尺寸可相比拟时，则声子的平均自由程 $\lambda$ 就由样品的边界决定，不再增大。而且在很低温度下，U过程出现的几率很小，边界散射成为主要因素。这种情况称为**尺寸效应**，此时点阵的热导率

$$\kappa \propto C_V V \sim T^3$$

一般温度下， $\lambda$ 为纳米量级，这就是纳米材料具备一些奇异性质的原因之一。

综上所述：绝缘体的热导率随温度变化：

1) 高温部分主要取决于声子随温度的变化， $T \downarrow, n \downarrow, \lambda \uparrow, \kappa \uparrow$   
 $\lambda$  的增大受限于晶体尺寸，这时温度下降带来的声子数目变化不再影响热导率  $\kappa$  的提高。

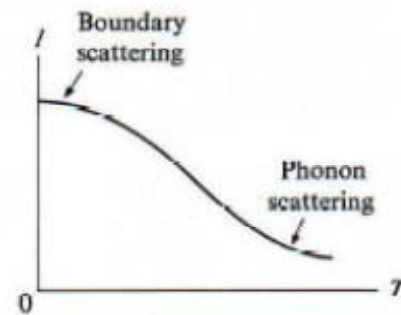
$$\kappa \sim \lambda \sim \frac{1}{\bar{n}} \sim \frac{1}{T}$$

2) 低温部分热容随温度急剧下降决定了热导率随温度明显下降。  
杂质和缺陷的无规分布，会给声子散射带来更多机会，使热导率下降。

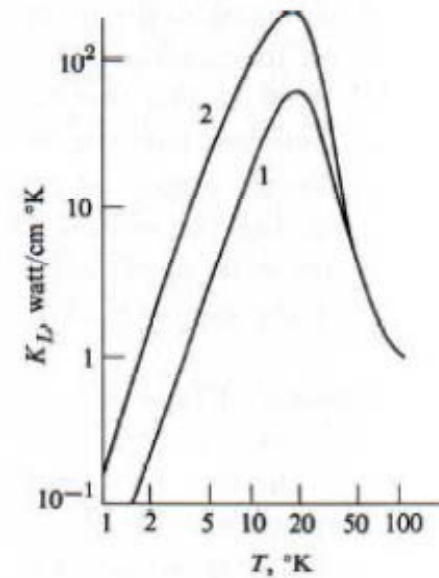
$$\kappa \sim C_V \sim T^3$$

T-dependence of the thermal conductivity ( $K=1/3 C v \ell$ ) :

- At low  $T$ ,  $K \sim C \sim T^3$
- At high  $T$ ,  $K \sim \ell \sim 1/T$



(a)



(b)

**Fig. 3.32** Thermal conductivity of isotopically pure crystals of LiF. Curve 1 is for a bar of cross section  $1.23 \times 0.91$  mm. Curve 2 is for a bar of cross section  $7.55 \times 6.97$  mm. (After P. D. Thatcher, Phys Rev. **156**, 975 (1967).)

$$\omega \sim \sqrt{\frac{\beta}{m}} q$$

$$v \sim \frac{d\omega}{dq} \sim \sqrt{\frac{\beta}{m}}$$

$$m \downarrow \quad v \uparrow$$

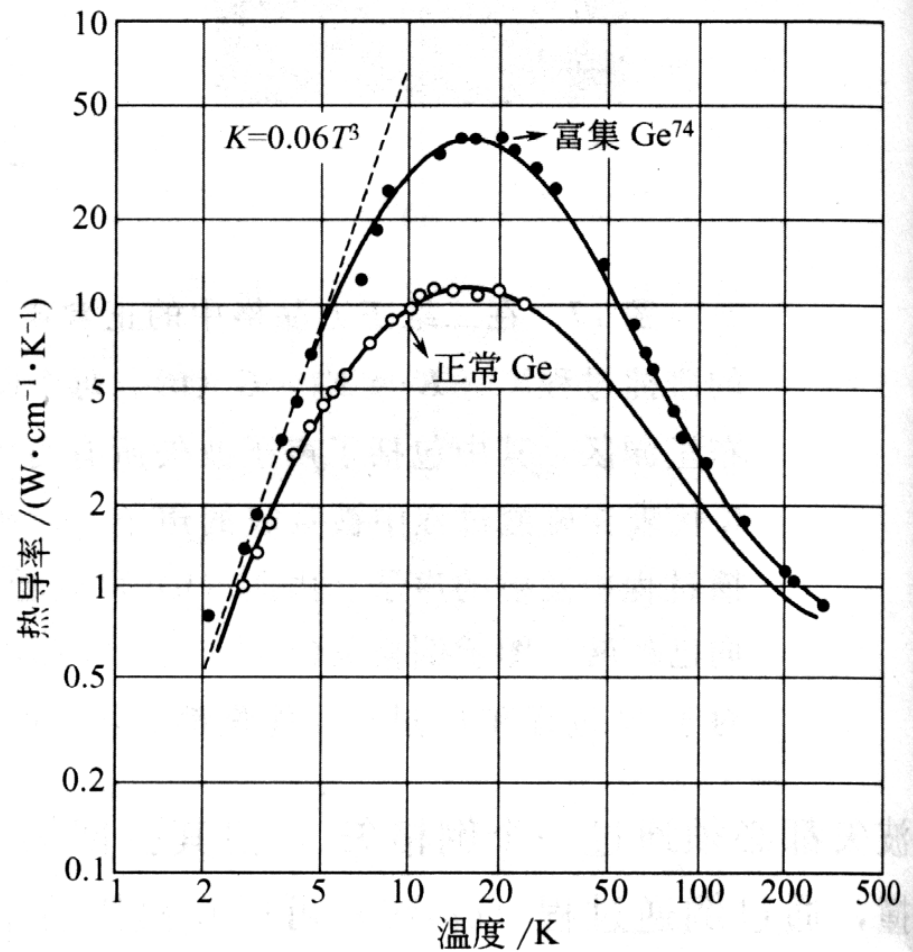
$$T_D \sim v$$

$$T_D \downarrow$$

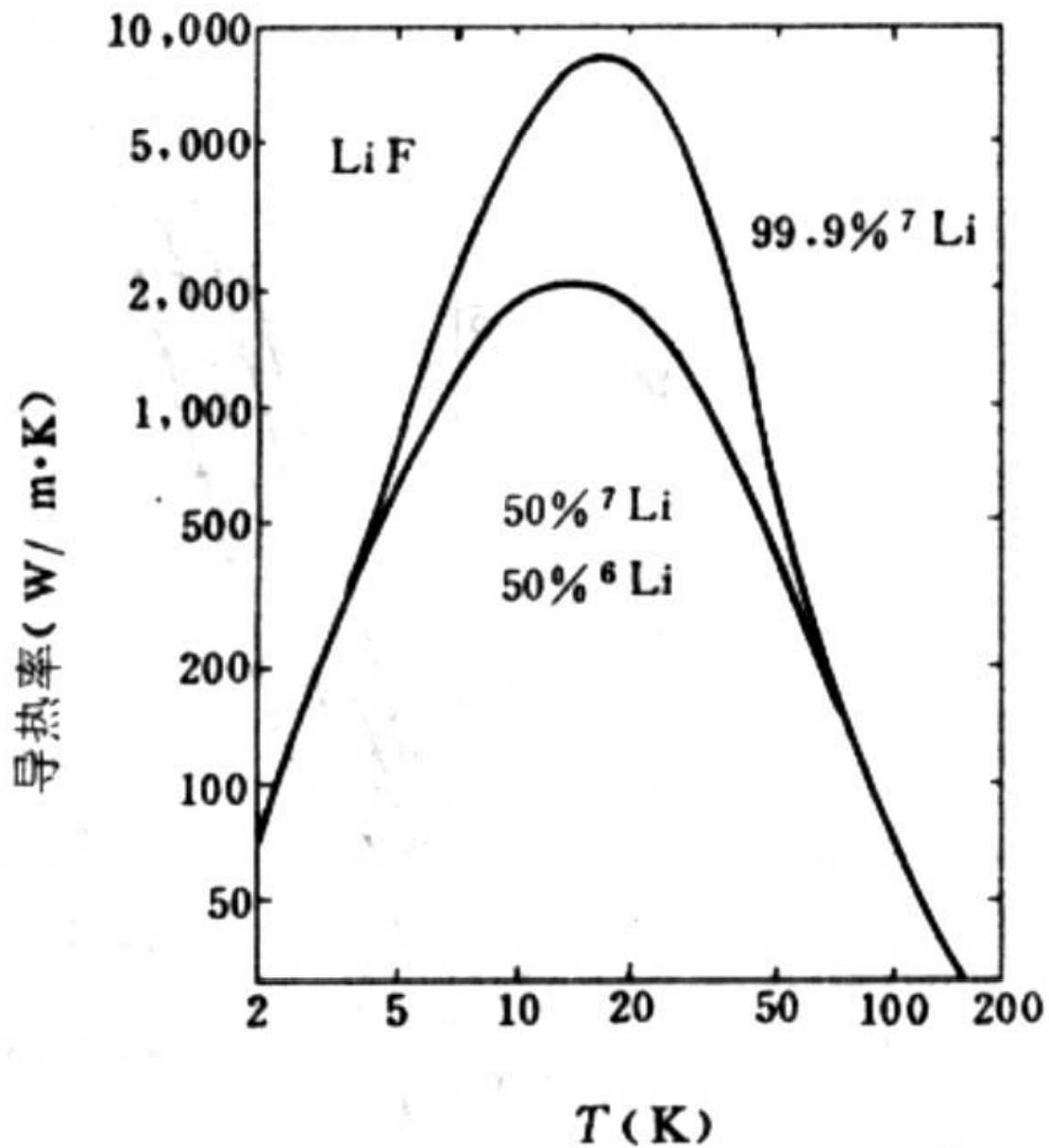
$$C_V \sim \left( \frac{T}{T_D} \right)^3 \quad \text{斜率上升}$$

高纯度NaF晶体热导率曲线，完全符合上述分析。

见 Kittel 8版 p94



锗晶体同位素效应对热导率的影响，富集样品中含有96%的Ge<sup>74</sup>，而天然样品含有不足40%的Ge<sup>74</sup>，所以前者热导率大于后者。



LiF 晶体中同位素效应对热导率的影响，与锗晶体同位素效应对热导率的影响结果是一致的。

见黄昆书p148

图 3-32 热导与杂质



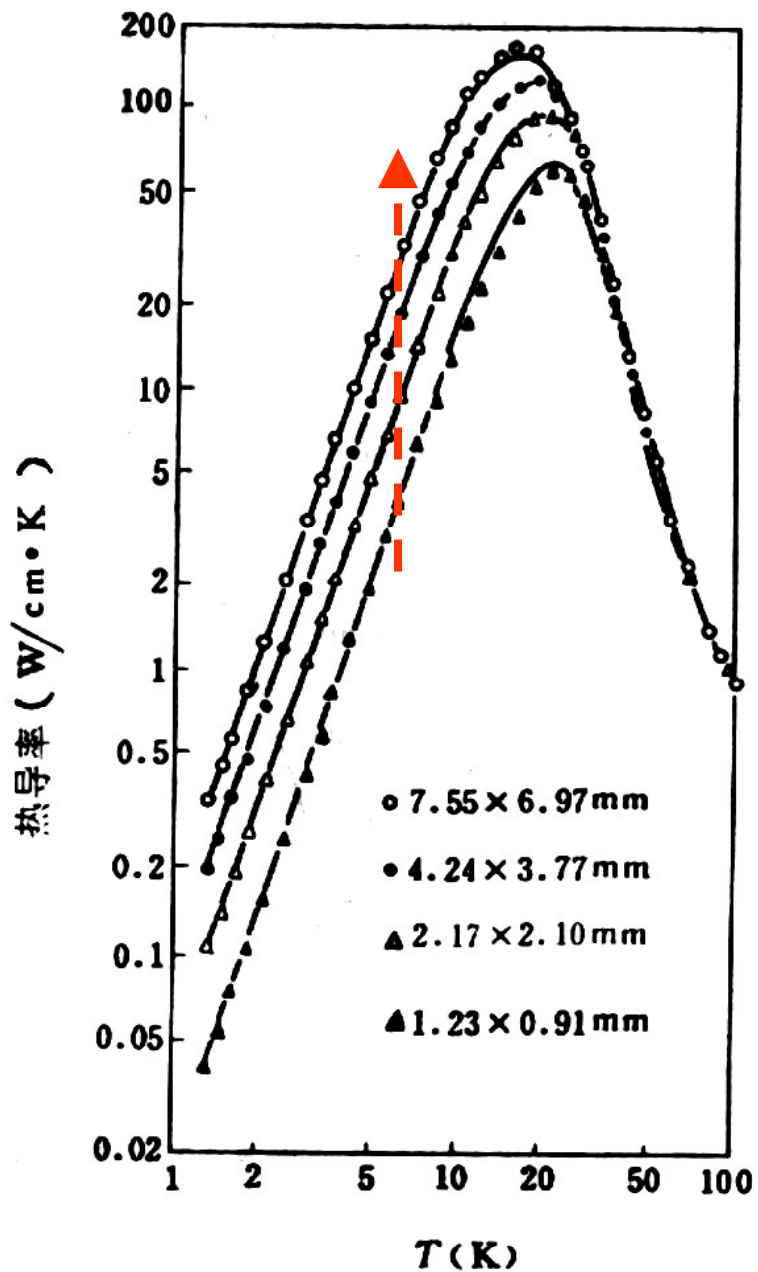


图 3-31 热导与样品尺寸之间的关系

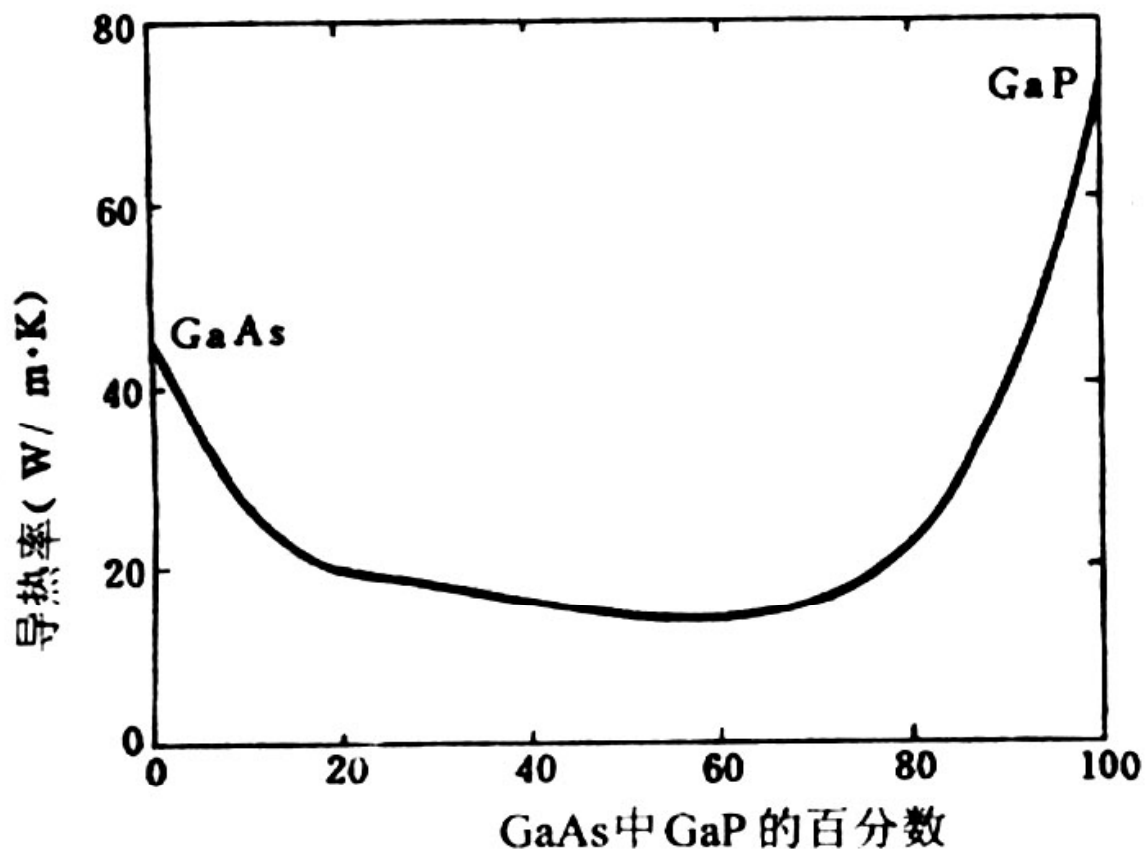
LiF 晶体不同尺寸样品热导温度关系图。

见黄昆 书p146 图3-31

四条曲线既反映了样品尺寸对热导率的影响，也整体反映了热容以及声子数目对热导率的影响。

$$\kappa \propto C_V V$$

原子无序分布给热导率带来的影响：



杂质、缺陷参与声子散射，使得平均自由程减小，导热率降低

图 3-33 合金的热导

见黄昆书 p148.

#### 四. 晶格状态方程和热膨胀:

$$p = -\frac{dU}{dV}$$

零温下

$$K = -V \frac{dp}{dV} = \left( V \frac{d^2U}{dV^2} \right)_{V_0}$$

$$p = -\left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad T > 0$$

系统的绝大多数热力学性质都可以从配分函数中得到

<b>Helmholtz free energy:</b>	$F = -\frac{\ln Z}{\beta}$
<b>Internal energy:</b>	$U = -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_{N,V}$
<b>Pressure:</b>	$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_{N,T}$
<b>Entropy:</b>	$S = k(\ln Z + \beta U)$
<b>Gibbs free energy:</b>	$G = F + PV = -\frac{\ln Z}{\beta} + \frac{V}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_{N,T}$
<b>Enthalpy:</b>	$H = U + PV$
<b>Constant volume heat capacity:</b>	$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V}$
<b>Constant pressure heat capacity:</b>	$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{N,P}$
<b>Chemical potential:</b>	$\mu_i = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial N_i}\right)_{T,V,N}$

热膨胀也可以通过热力学方法来处理。固体状态方程是有用的工具。我们先推出晶体的状态方程：（黄昆书p137）

$$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad \textcircled{1}$$

统计物理给出： $F = -k_B T \ln Z$   $\textcircled{2}$

$Z$  是晶体的总配分函数，

$$Z = \sum_i e^{-\frac{U_i + E_i}{k_B T}}$$

$U_i$ 是原子处于格点平衡位置时的结合能  
 $E_i$ 是声子能量： $(n_i + \frac{1}{2})\hbar\omega_i$

$i$ 标志不同格波， $n_i$ 为对应的量子数，配分函数应对所有的量子态求和

Z 是晶体的总配分函数，

$$Z = \sum_i e^{-\frac{U_l + E_i}{k_B T}} = e^{-\frac{U_l}{k_B T}} \sum_i e^{-(n_i + \frac{1}{2})\hbar\omega_i / k_B T}$$

$$= e^{-\frac{U_l}{k_B T}} \prod_i e^{-\frac{1}{2}\hbar\omega_i / k_B T} \left[ \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-n_i\hbar\omega_i / k_B T} \right]$$

$$= e^{-\frac{U_l}{k_B T}} \prod_i e^{-\frac{1}{2}\hbar\omega_i / k_B T} \left[ \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega_i / k_B T}} \right]$$

使用求和公式：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

代入②式，有：

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$F = U_l(V) + k_B T \sum_i \left[ \frac{1}{2} \frac{\hbar \omega_i}{k_B T} + \ln(1 - e^{-\hbar \omega_i / k_B T}) \right]$$

代入①式，有：

$$p = -\frac{dU_l}{dV} - \sum_i \left( \frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{e^{\hbar \omega_i / k_B T} - 1} \right) \frac{d\omega_i}{dV}$$

$$= -\frac{dU_l}{dV} - \sum_i \left( \frac{\hbar \omega_i}{2} + \frac{\hbar \omega_i}{e^{\hbar \omega_i / k_B T} - 1} \right) \frac{1}{V} \frac{d \ln \omega_i}{d \ln V}$$

该式包含了各振动频率对V的依赖关系，比较复杂，Gruneisen提出一个近似，上式得到简化。并进一步假定参数  $\gamma$  对所有振动相同

晶格振动平均能量  $\bar{E}$

**Gruneisen常数**

$$p = -\frac{dU_l}{dV} + \gamma \frac{\bar{E}}{V} \quad \text{③}$$

$$\gamma = -\frac{d \ln \omega}{d \ln V}$$

由于一般情况下， $V \uparrow, \omega \downarrow$

所以  $\gamma > 0$

**格林爱森Gruneisen近似状态方程**

使用该状态方程讨论晶体热膨胀问题：

在没有外界压力时，即  $p=0$  时：
$$\frac{dU_l}{dV} = \gamma \frac{\bar{E}}{V}$$

膨胀较小时，可以展开：

$$\frac{dU_l}{dV} = \left( \frac{dU_l}{dV} \right)_{V_0} + \left( \frac{d^2U_l}{dV^2} \right)_{V_0} (V - V_0) + \dots$$

有：
$$\left( \frac{d^2U_l}{dV^2} \right)_{V_0} (V - V_0) = \gamma \frac{\bar{E}}{V} \implies \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\gamma}{V_0 \left( \frac{d^2U_l}{dV^2} \right)_{V_0}} \frac{\bar{E}}{V} = \frac{\gamma}{K} \frac{\bar{E}}{V}$$

对  $T$  微商，得到  
体膨胀系数为：

$$\alpha = \frac{\gamma}{K} \frac{C_V}{V}$$

$$K = V_0 \left( \frac{d^2U_l}{dV^2} \right)_{V_0}$$

$K$  为体弹性模量。

该式称作 **Gruneisen** 定律，它表示温度变化时，热膨胀系数近似和热容量成比例，在很多材料的测量中都证实存在这种关系，实验确定的  $\gamma$  值在 1—2 之间。



## 习题

对于一维单原子链，证明格临爱森常数与波矢 $q$ 无关。